

О неравенстве Коши-Шварца

Как раз ты спрашивал у Кукушкина откуда берётся неравенство *Коши-Шварца*. Так вот, оказывается само неравенство является следствием, так называемого тождества Бине:

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j y_j\right) = \left(\sum_{j=1}^n a_j y_j\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j x_j\right) + \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)(x_j y_k - x_k y_j)$$

Далее, положим $a_j = w_j$; $b_j = \bar{z}_j$; $x_j = \bar{w}_j$; $y_j = z_j$. Получаем тождество:

$$\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right) = \left|\sum_{j=1}^n w_j z_j\right|^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} |w_j \bar{z}_k - w_k \bar{z}_j|^2$$

Теперь же, нетрудно усмотреть, что

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} |w_j \bar{z}_k - w_k \bar{z}_j|^2$$

неотрицательно, откуда заключаем:

$$\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right) \geq \left|\sum_{j=1}^n w_j z_j\right|^2$$

Поэтому, я думаю, если хочется понять *геометрию* неравенства, то лучше начать с *геометрии* тождества Бинэ.